EXAMEN DE PROBABILIDAD. 23/1/2012
2º Curso del GRADO EN ESTADISTICA

1.- Un investigador cuenta con tres tipos de insectos para sus investigaciones. El 20% es de tipo A, el 30% de tipo B y el 50% restante de tipo C. El científico elige cada día un insecto para realizar una prueba determinada. La prueba da resultado positivo con probabilidad **p**. Si esto lo hace durante 10 días, de modo que el insecto elegido puede ser el mismo dos o más días:

a) ¿cuál es el número esperado de insectos de tipo A que dan resultado positivo en la prueba?.

b) ¿cuál es el número esperado de insectos de tipo A que son elegidos para la prueba si se sabe que hay **z** de tipo C a los que se les realizó la prueba?.

c) Dar la distribución de la variable esperanza condicionada $E(N_A / N_C)$, donde N_A y N_C son las variables que intervienen en el apartado b).

(1.8 puntos)

2.- Se considera una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de una distribución exponencial de media 3. Sea F_n la función de distribución empírica asociada a dicha muestra. Se pide:

a) Dé la distribución aproximada de $F_n(2)$.

b) Calcule de manera exacta y aproximada la siguiente probabilidad $P(F_n(2) > (18/20))$.

c) Haga una representación probable de F_n para la muestra del enunciado explicando porqué es probable.

(1.8 puntos)

3.- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes igualmente distribuidas con ley de probabilidad dada por la función de densidad

$$f(x) = \left(\frac{2x}{\theta^2}\right) \qquad \text{si} \quad 0 < x < \theta$$

donde $\theta > 0$

a) Calcule su esperanza y su varianza.

b) Obtenga la ley del Máximo y del Mínimo de las n variables.

c) Calcule $EX_{(n)}$ y $VarX_{(n)}$.

(1.8 puntos)

4.- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes igualmente distribuidas con ley de probabilidad de Weibull, función de densidad

$$f(x) = \left(\frac{2x}{\theta^2}\right) \; Exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \qquad x > 0, \quad \theta > 0,$$

a) Estudie la convergencia en probabilidad de las siguientes sucesiones de variables aleatorias T_n y V_n cuando n tiende hacia infinito:

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \qquad V_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$$

b) Dé la distibución aproximada de T_n y V_n para n suficientemente grande.

(1.8 puntos)

5.- Sean *X* e *Y* variables aleatorias independientes *N(0,1)* obtenga la distribución de $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$
(1 punto)

6.- Sea un vector aleatorio (X, Y) con distribución normal bidimensional cuyo vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas son

$$\mu=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Sigma=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Obtenga el coeficiente de correlación entre X y X+Y, y la probabilidad condicionada P(X+Y<5 / X>4).
b) Sean las variables U=2X+Y y V=X-Y. Obtenga el coeficiente de correlación entre U y V.
c) Obtenga la siguiente probabilidad condicionada P(4<Y<5 / X=0).
d) Obtenga una expresión explícita para la v.a. E(U/V).

(1.8 puntos)