

**EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA.** 14/06/04  
2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA

- 1.- Se considera una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de una distribución exponencial de media 2. Sea  $F_n$  la función de distribución empírica asociada a dicha muestra. Se pide:
- Calcular de manera exacta la siguiente probabilidad  $P(F_n(2) > (18/20))$ .
  - Dar la ley asintótica de  $F_n(2)$ .
  - Estudiar la convergencia puntual de  $F_n(2)$ .
  - ¿Conoces algún resultado que relacione  $F_n$  con la función de distribución de la exponencial de media 2?.

(1 punto)

- 2.- Diseñar un experimento y dar una regla de decisión que permita confirmar si una moneda es balanceada. Dicha regla de decisión debe cumplir las siguientes condiciones:

- La probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad es correcta es como máximo 0.05.
- La probabilidad de aceptar la hipótesis cuando en realidad la probabilidad de cara difiere de 0.5 por 0.1 o más es como máximo 0.05.

¿Podemos encontrar otra regla de decisión mejor que la dada?. Justificar la respuesta.

(1 punto)

- 3.- Los miembros de un club alpino discuten sobre cuál de dos picos resulta más difícil de escalar. Uno de los miembros, pretendiendo dar un carácter riguroso a sus argumentos, recoge todos los datos de los intentos de escalada a ambos picos que ha habido por parte de los miembros del club anteriormente, y observa que de los 108 miembros que lo han intentado, 73 han subido a los dos picos, 12 no han conseguido subir a ninguno, 9 han subido al primero pero no al segundo y 14 no consiguen escalar el primero pero sí el segundo. ¿Existe evidencia de una mayor dificultad en la escalada a alguno de los picos?.

(1 punto)

- 4.- Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a.s. de una población con ley de probabilidad exponencial de media  $\lambda$ , se pide:

- Obtener la distribución asintótica del estadístico  $\frac{\bar{X} - 1}{\bar{X} + 1}$ .
- ¿Qué propiedades tiene el estadístico del apartado anterior como estimador de  $(\lambda - 1)/(\lambda + 1)$  en muestras grandes?.
- Plantear tres regiones críticas de nivel  $\alpha$ , distintas, para contrastar  $H_0: \lambda = 2$  contra  $H_1: \lambda \neq 2$ . ¿Alguna de ellas está relacionada con el TRV?.
- Para el contraste del apartado anterior y con la región crítica que creas conveniente contestar a la siguiente pregunta: ¿cuál es el tamaño muestral necesario para detectar una alternativa  $\lambda = 4$  con una potencia mayor del 90%?. Hacer una representación aproximada de la función potencia para la región crítica utilizada. Tomar  $\alpha = 0.05$ .

(2 puntos)

- 5.- Hacer un esquema de las técnicas de bondad de ajuste que se conozcan para el caso de hipótesis compuesta, indicando en qué casos son más adecuadas y si hay problemas para obtener la distribución del estadístico test cuando proceda.

(1.5 puntos)

6.- En cierta factoría se trabaja con dos tipos de máquinas A y B. El consumo energético diario de una máquina de tipo A es una v. a. con ley  $N(\mu_A, \sigma^2)$  y el de una máquina de tipo B  $N(\mu_B, 3\sigma^2)$ . Se observan los consumos energéticos diarios de 10 máquinas de cada tipo elegidas al azar y se anotan las medias y varianzas muestrales siguientes:

$$\bar{X}_A = 50.19 \quad \bar{X}_B = 102.085 \quad S_A^2 = 0.8037 \quad S_B^2 = 2.628$$

En el proceso de producción que se desarrolla en dicha factoría, intervienen 2 máquinas de tipo A y una de tipo B. Responder a las siguientes cuestiones:

- a) Estudiar la ley de probabilidad del estadístico  $\frac{n_A S_A^2 + \frac{n_B}{3} S_B^2}{\sigma^2}$ .
- b) Obtener un intervalo de confianza del 95% para el consumo energético medio diario del proceso de producción. Para ello utilizar el estadístico del apartado anterior para deducir la ley del estadístico pivot que permite construir el intervalo pedido.
- c) ¿Soportan los datos la hipótesis de que una máquina de tipo A consume menos de la mitad que una de tipo B?
- d) ¿Soportan los datos la hipótesis de que una máquina de tipo A consume la mitad que una de tipo B?. Indicar para qué niveles es posible rechazar esta hipótesis.
- e) En el contraste del apartado c), suponiendo  $\sigma^2=0.64$  conocido, especificar para qué niveles es posible rechazar la hipótesis nula y obtener la potencia con que se detectaría, para un nivel  $\alpha=0.05$ , una alternativa  $\mu_A=(\mu_B/2) - 1$ .

(2 puntos)

7.-Un estudio sobre la relación entre el estado civil de los hombres y su nivel laboral utilizó datos de 8235 gerentes y profesionales varones empleados por una gran empresa. Los autores del estudio agruparon la gran diversidad de categorías laborales de la empresa en cuatro niveles. El nivel 1 corresponde a los puestos de trabajo de menor categoría y el nivel 4 a los de máxima categoría. La salida de SPSS que analiza los datos obtenidos es la siguiente:

			ESTADO CIVIL				Total
			Casado	Divorciado	Soltero	Viudo	
NIVEL Laboral	1	Recuento	874	15	58	8	955
		Frecuencia esperada	896.4	14.6	39.1	4.9	955.0
		Residuos corregidos	-3.2	.1	3.3	1.5	
	2	Recuento	3927	70	222	20	4239
		Frecuencia esperada	3979.0	64.9	173.5	21.6	4239.0
		Residuos corregidos	-4.8	.9	5.4	-5	
	3	Recuento	2396	34	50	10	2490
		Frecuencia esperada	2337.3	38.1	101.9	12.7	2490.0
		Residuos corregidos	5.9	-.8	-6.3	-9	
	4	Recuento	533	7	7	4	551
		Frecuencia esperada	517.2	8.4	22.5	2.8	551.0
		Residuos corregidos	2.9	-.5	-3.5	.7	
Total	Recuento	7730	126	337	42	8235	
	Frecuencia esperada	7730.0	126.0	337.0	42.0	8235.0	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	67.397 <sup>a</sup>	9	.000
Razón de verosimilitud	74.923	9	.000
N de casos válidos	8235		

a. 2 casillas (12.5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2.81.

**Medidas direccionales**

			Valor	Error típ. asint. <sup>a</sup>	T aproximada <sup>b</sup>	Sig. aproximada
Nominal por nominal	Lambda	Simétrica	.000	.000	. <sup>c</sup>	. <sup>c</sup>
		NIVEL depend.	.000	.000	. <sup>c</sup>	. <sup>c</sup>
		ESTADO depend.	.000	.000	. <sup>c</sup>	. <sup>c</sup>
	Tau de Goodman y Kruskal	NIVEL depend.	.004	.001		.000 <sup>d</sup>
		ESTADO depend.	.006	.001		.000 <sup>d</sup>
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	-.053	.007	-7.413	.000
		NIVEL depend.	-.169	.022	-7.413	.000
		ESTADO depend.	-.032	.004	-7.413	.000

- a. Asumiendo la hipótesis alternativa.
- b. Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.
- c. No se puede efectuar el cálculo porque el error típico asintótico es igual a cero.
- d. Basado en la aproximación chi-cuadrado.

¿Muestran los datos una relación estadísticamente significativa entre el estado civil y el nivel laboral?. Comenta lo más destacable de los resultados anteriores y explica cómo se calcula el valor del estadístico chi-cuadrado y su p-valor.  
(1.5 puntos)