

**EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA. 17/6/02**  
**2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA**

- 1.- Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a.s. de una población con ley de probabilidad uniforme  $(\theta, 2\theta)$ , se pide:
- Obtener el E.M.V. para  $\theta$ .
  - Estudiar la consistencia e insesgidez de los siguientes estimadores de  $\theta$  y compararlos:

$$\frac{X_{(n)}}{2} \quad \frac{(n+1)X_{(1)}}{n+2} \quad \frac{2\bar{X}}{3}$$

Indicación:

$$EX_{(1)} = \frac{n+2}{n+1}\theta \quad EX_{(n)} = \frac{2n+1}{n+1}\theta \quad \text{Var}X_{(1)} = \text{Var}X_{(n)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$$

- Obtener intervalos de confianza de nivel  $1-\alpha$  para  $\theta$  del siguiente modo:
  - Utilizando la distribución exacta del E.M.V.
  - Intervalo asintótico.

(2 puntos)

- 2.- Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a.s. de una población con ley de probabilidad exponencial de media  $\lambda$ , se pide:

- Obtener la distribución asintótica del estadístico  $\frac{\bar{X}-1}{\bar{X}+1}$ .
- ¿Qué propiedades tiene el estadístico del apartado anterior como estimador de  $(\lambda-1)/(\lambda+1)$  en muestras grandes?
- Plantear tres regiones críticas de nivel  $\alpha$ , distintas, para contrastar  $H_0: \lambda=2$  contra  $H_1: \lambda \neq 2$ . ¿Alguna de ellas está relacionada con el TRV?
- Para el contraste del apartado anterior y con la región crítica que creas conveniente contestar a la siguiente pregunta: ¿cuál es el tamaño muestral necesario para detectar una alternativa  $\lambda=4$  con una potencia mayor del 90%?. Hacer una representación aproximada de la función potencia para la región crítica utilizada. Tomar  $\alpha=0.05$ .
- Si la media muestral es 2.5 y el tamaño muestral 100, ¿cuál es el mínimo nivel al que podemos rechazar la hipótesis nula del apartado c)?. Contesta la pregunta utilizando la región crítica que te permita precisar más.

(2 puntos)

- 3.- Once niños pasaron un test de aritmética, después de tres semanas de enseñanza especial pasaron un nuevo test de igual dificultad que el primero. La puntuación de cada prueba se da a continuación:

*Primer test:*      45   61   33   29   21   47   53   32   37   25   81  
*Segundo test:*    53   67   47   34   31   49   62   51   48   29   86

¿Indican los datos que la mejora media en la puntuación debida a la enseñanza especial es de diez puntos?. Contestar a esta pregunta bajo los dos supuestos siguientes:

- Suponiendo normalidad.
- Sin suponer normalidad.

(1.5 puntos)

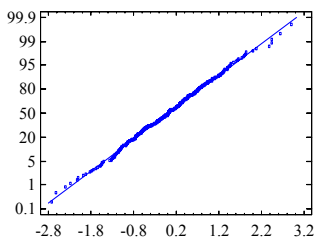
- 4.- La característica de interés de ciertos componentes electrónicos es la duración, que se sabe sigue la ley exponencial negativa. Dos casas A y B producen dichos componentes y para realizar un estudio comparativo

de ambas se extrajeron muestras independientes de tamaños 12 y 10 respectivamente, obteniéndose medias muestrales de 4018.066 para A y 2265.955 para B. Se pide:

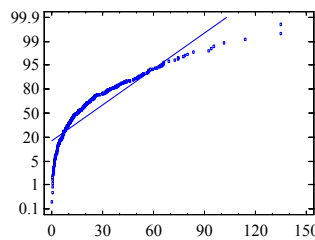
- Obtener un intervalo de confianza de nivel  $1-\alpha$  para el cociente de duraciones medias de las dos casas. Para ello utilizar como estadístico pivot una función del cociente de medias muestrales.
- ¿Son significativamente más duraderos los componentes electrónicos de la casa A que los de la casa B?. Relacionar la respuesta con el apartado a).
- Calcular la capacidad del test correspondiente al apartado b) para detectar que la duración media de los componentes de A es al menos el 17% superior a la de los componentes de B. Tomar  $\alpha=0.05$ .

(1.75 puntos)

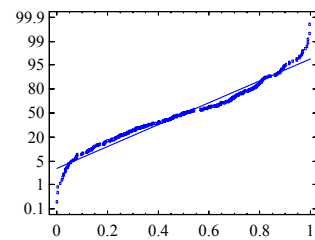
5.- Tenemos una muestra aleatoria simple de una población de la que se quiere hacer un estudio de localización. ¿Qué test utilizarías para dicho estudio según que un plot de normalidad para dicha muestra presente el aspecto a), b) ó c)?. Justificar la respuesta.



a)



b)



c)

(1 punto)

6.- Con el fin de estudiar la influencia del estado dental en la presentación de cefaleas, se tomaron 36 adolescentes y se les clasificó según presentaran o no cefaleas y según tuvieran o no la dentadura deteriorada.

		Dentadura	
		NO	SI
Cefaleas	NO	13	3
	SI	1	2

- Según los datos de la tabla anterior, ¿es significativa dicha influencia?
- Dar un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las siguientes probabilidades:
  - Tener la dentadura deteriorada en los adolescentes que no presentan cefaleas.
  - Tener la dentadura deteriorada en los adolescentes que presentan cefaleas.
- Hacer lo mismo para el cociente de dichas probabilidades.

(1.75 puntos)

**Notas:**

$$\text{Var}_{H_0} W_s^* = \frac{mn(N+1)}{12} - \frac{mn \sum_{i=1}^e (d_i^3 - d_i)}{12N(N-1)}$$

$$\text{Var}_{H_0} V_s^* = \frac{N'(N'+1)(2N'+1)}{24} - \frac{\sum_{i=1}^e (d_i^3 - d_i)}{48}$$