EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA. 27/1/04
2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA
1º PARCIAL

1.- Indicar cual de las afirmaciones siguientes son falsas y corregirlas enunciándolas correctamente:

1. Si la varianza de un estimador converge hacia cero cuando el tamaño muestral tiende hacia infinito entonces es un estimador consistente.
2. Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad Normal, μ es E.I.U.V.M. para $\overline{X}$.
3. La función de distribución muestral o empírica asociada a una m.a.s. de una distribución Poisson de media 1, evaluada en 3, es una variable aleatoria cuya distribución es Poisson de media 3.
4. Sea $\{X_n\}_{n=1,\ldots}$ sucesión de variables aleatorias. Si X_n converge en ley hacia una $N(0,1/n)$ entonces X_n converge en probabilidad a cero.
5. Si $\hat{\theta}^{1/2}$ es el E.M.V. de $\theta^{1/2}$ para una familia de tipo exponencial uniparamétrico en θ entonces $\hat{\theta}^{1/2}$ es C.A.N. para θ y por tanto consistente asintóticamente.
6. Si un estimador es asintóticamente eficiente para θ entonces es E.I.U.V.M. para θ.
7. Si T_n es un estimador asintóticamente insesgado para $g(\theta)$ y su varianza converge hacia cero cuando n tiende hacia infinito entonces T_n es un estimador consistente para θ.
8. Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad Normal(μ, σ^2) si sabemos que $\sigma^2= 4$ entonces n $\sigma^2/4$ tiene una distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.
9. Si un estimador T_n es E.I.U.V.M. para θ no puede existir otro estimador con menor error cuadrático medio que el de T_n para todo θ.
10. Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. para obtener la distribución asintótica del estadístico $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ aplicamos el delta método a $X_1,\ldots,X_n$ tomando como función $g(x)=x^2$.

(1.5 puntos)

2.- Se consideran los cuatro estimadores de θ cuyas esperanzas y varianzas se indican a continuación:

$$\mathrm{E}(T_1) = \frac{n+(1/2)}{n+1}\theta \qquad \mathrm{E}(T_2) = \theta \qquad \mathrm{E}(T_3) = \theta \qquad \mathrm{E}(T_4) = 3\theta/2$$

$$\mathrm{Var}(T_1) = \frac{n}{4(n+1)^2(n+2)}\theta^2 \quad \mathrm{Var}(T_2) = \frac{n}{(n+2)^3}\theta^2 \quad \mathrm{Var}(T_3) = \frac{1}{27n}\theta^2 \quad \mathrm{Var}(T_4) = \frac{1}{12n}\theta^2$$

ordenar los estimadores según sean más o menos eficientes para θ y explicar sus propiedades como estimadores de θ.
(1.25 puntos)

3.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad dada por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{Exp}\left\{ -\dfrac{x^{3/2}}{\theta} \right\} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{Siendo} \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ. Representar la función de verosimilitud de la muestra.
b) ¿Qué propiedades tiene el E.M.V. de θ?, ¿cuál es su distribución asintótica?.
c) Determinar intervalos de confianza para θ de nivel 0.95:
    1. Intervalo exacto
    2. Intervalo asintótico
d) Obtener el E.M.V. para $\theta^{2/3}$ y su distribución asintótica.
e) Se considera $\overline{X}$ como estimador de $\theta^{2/3}$. Estudiar sus propiedades y compararle con el E.M.V. obtenido en d) para muestras grandes.

Notas:
$E(X_i)=0.9027\ \theta^{2/3}$
$Var(X_i)=0.3757\ \theta^{4/3}$
(3 puntos)

4.- El control de recepción de una partida de rodillos se realiza clasificando las piezas en pequeñas, normales y grandes. Las proporciones teóricas respectivas se suponen $p_1=0.05$, $p_2=0.90$ y $p_3=0.05$, pero se sospecha que ha aumentado la dispersión y, por tanto, las piezas se clasifican según proporciones $p_1=0.05+\theta$, $p_2=0.90-2\theta$ y $p_3=0.05+\theta$. Se analizan 5000 piezas obteniendo $n_1=278$ $n_2=4428$ y $n_3=294$ piezas de cada clase. Se pide el estimador máximo verosímil de θ.
(1 punto)

5.- Se investigan cierto tipo de errores en aeroplanos, que pueden producir información falsa a la tripulación. De 1600 aeroplanos seleccionados al azar en determinada compañía aérea se encontró que el 8% tenían errores. Se pide.

a) Obtener un intervalo de confianza del 99% para la proporción de aeroplanos que tienen este tipo de errores.
b) Si se utiliza la información de este ejemplo para obtener una estimación preliminar de p. ¿De qué tamaño debe ser la muestra para que el error en la estimación de p sea a lo más 0.005 con una confianza del 99%?
c) ¿De qué tamaño debe ser la muestra para que el error en la estimación de p sea a lo más 0.01 con una confianza del 99%, cualquiera que sea el valor de p?
d) Se inspeccionaron 1000 aeroplanos seleccionados al azar en otra compañía aérea. En este caso el 7% tenían errores. Dar un intervalo de confianza del 99% para la diferencia en la proporción de errores entre las dos compañías.

(2 puntos)

6.- En cierta factoría se trabaja con tres tipos de máquinas: A, B y C. El consumo energético diario de una máquina de tipo A es una v. a. con ley $N(\mu_A, \sigma^2)$, el de una máquina de tipo B es $N(\mu_B, 3\sigma^2)$ y el de una de tipo C es $N(\mu_C, 2\sigma^2)$. Se observan los consumos energéticos diarios de 11 máquinas de cada tipo elegidas al azar y se anotan las medias y varianzas muestrales siguientes:

$$\overline{X}_A = 50.19 \quad \overline{X}_B = 102.085 \quad \overline{X}_C = 75.20$$

$$S_A^2 = 0.8037 \quad S_B^2 = 2.628 \quad S_C^2 = 1.605$$

En el proceso de producción que se desarrolla en dicha factoría, intervienen 2 máquinas de tipo A , una de tipo B y una de tipo C. Obtener un intervalo de confianza del 95% para el consumo energético medio diario del proceso de producción.
(1.25 puntos)