EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA. 28/1/03
2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA
1º PARCIAL

1.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad dada por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{Exp}\left\{ -\dfrac{x^{3/2}}{\theta} \right\} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{Siendo} \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ. Representar la función de verosimilitud de la muestra.
b) ¿Qué propiedades tiene el E.M.V. de θ?, ¿cuál es su distribución asintótica?.
c) Determinar intervalos de confianza para θ de nivel 0.95:
    1. Intervalo exacto
    2. Intervalo asintótico
d) Obtener el E.M.V. para $\theta^{2/3}$ y su distribución asintótica.
e) Se considera $\overline{X}$ como estimador de $\theta^{2/3}$. Estudiar sus propiedades y compararle con el E.M.V. obtenido en d) para muestras grandes.
f) Proponer un estimador razonable para $\theta^{2/3}$ distinto de los considerados en los apartados d) y e) y explicar porqué se considera razonable.

Notas primer problema:
$E(X_i)=0.9027\ \theta^{2/3}$
$Var(X_i)=0.3757\ \theta^{4/3}$
(3 puntos)

2.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad dada por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^3 & \text{si} \quad x \geq \theta \\ 0 & \text{si} \quad x < \theta \end{cases} \qquad \text{Siendo} \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ.
b) Obtener un intervalo de confianza para θ de nivel 0.95.
(1 punto)

3.- El control de recepción de una partida de rodillos se realiza clasificando las piezas en pequeñas, normales y grandes. Las proporciones teóricas respectivas se suponen $p_1=0.05$, $p_2=0.90$ y $p_3=0.05$, pero se sospecha que ha aumentado la dispersión y, por tanto, las piezas se clasifican según proporciones $p_1=0.05+\theta$, $p_2=0.90-2\theta$ y $p_3=0.05+\theta$. Se analizan 5000 piezas obteniendo $n_1=278$ $n_2=4428$ y $n_3=294$ piezas de cada clase. Se pide el estimador máximo verosímil de θ.
(1 punto)

4.- Se investigan cierto tipo de errores en aeroplanos, que pueden producir información falsa a la tripulación. De 1600 aeroplanos seleccionados al azar en determinada compañía aérea se encontró que el 8% tenían errores. Se pide.

a) Obtener un intervalo de confianza del 99% para la proporción de aeroplanos que tienen este tipo de errores.
b) Si se utiliza la información de este ejemplo para obtener una estimación preliminar de p. ¿De qué tamaño debe ser la muestra para que el error en la estimación de p sea a lo más 0.005 con una confianza del 99%?
c) ¿De qué tamaño debe ser la muestra para que el error en la estimación de p sea a lo más 0.01 con una confianza del 99%, cualquiera que sea el valor de p?
d) Se inspeccionaron 1000 aeroplanos seleccionados al azar en otra compañía aérea. En este caso el 7% tenían errores. Dar un intervalo de confianza del 99% para la diferencia en la proporción de errores entre las dos compañías.

(2 puntos)

5.- Un científico de la computación está investigando la utilidad de dos lenguajes de diseño para mejorar las tareas de programación. Se pide a 12 programadores expertos, familiarizados con los dos lenguajes, que codifiquen una función estándar en ambos lenguajes, anotando el tiempo, en minutos, que tardan en hacerlo. Los datos obtenidos son los siguientes:

Programador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lenguaje de diseño 1	17	16	21	14	18	24	16	14	21	23	13	18
Lenguaje de diseño 2	18	14	19	11	23	21	10	13	19	24	15	20

Obtener un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en los tiempos medios de codificación.

(1 punto)

6.- La tabla adjunta recoge los tamaños de cinco muestras aleatorias simples independientes de poblaciones normales junto con los valores del estadístico $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$ y de las medias muestrales $\overline{X}_i$.

Muestra	1	2	3	4	5
n_i	6	4	3	7	8
T_i	42	31	26	43	50
$\overline{X}_i$	8.1	8.3	8.2	8.4	8.0

a) Suponiendo que las cinco poblaciones tienen la misma varianza obtener un intervalo de confianza para la desviación típica poblacional a nivel 0.95.
b) También suponiendo varianza común, obtener intervalos de confianza simultáneos para las cinco medias de nivel conjunto 0.9.
c) Considerando sólo los datos obtenidos para las muestras 3 y 4 y suponiendo conocido que la varianza de la población 4 es 2/3 de la varianza de la población 3 construir un intervalo de confianza del 99% para μ_3-2μ_4 , siendo μ_3 y μ_4 las medias de las poblaciones 3 y 4 respectivamente.
d) Obtener una cota confidencial superior del 99% para μ_3-μ_4 sin asumir ninguna hipótesis sobre las varianzas.

(2 puntos)