EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA. 1/2/02
2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA
1º PARCIAL

1.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad dada por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{Exp}\left\{ -\dfrac{x^{3/2}}{\theta} \right\} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{Siendo} \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ.
b) ¿Qué propiedades tiene el E.M.V. de θ?, ¿cuál es su distribución asintótica?.
c) Determinar intervalos de confianza para θ de nivel 0.95:
    1. Intervalo exacto
    2. Intervalo asintótico
d) Obtener el E.M.V. para $\theta^{2/3}$ y su distribución asintótica.
e) Se considera $\overline{X}$ como estimador de $\theta^{2/3}$. Estudiar sus propiedades y compararle con el E.M.V. obtenido en d) para muestras grandes.
f) Proponer un estimador razonable para $\theta^{2/3}$ distinto de los considerados en los apartados d) y e) y explicar porqué se considera razonable.

Notas primer problema:
$E(X_i)=0.9027\ \theta^{2/3}$
$Var(X_i)=0.3757\ \theta^{4/3}$
(3 puntos)

2.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad dada por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^3 & \text{si} \quad x \geq \theta \\ 0 & \text{si} \quad x < \theta \end{cases} \qquad \text{Siendo} \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ.
b) Obtener un intervalo de confianza para θ de nivel 0.95.
(1 punto)

3.- En un comercio donde se vende prensa se supone que hay una probabilidad de 1/3 de que cada persona que pase compre un periódico. Sea X la v.a. número de personas que pasan hasta que se vende el periódico número 100 (incluida la persona que compra el número 100), calcular de forma aproximada la probabilidad de que X esté entre 280 y 310. Explicar el resultado que se ha usado para aproximar dicha probabilidad.
(1 punto)

4.- A efectos de establecer las tarifas de los seguros de automóviles para el próximo año, una compañía está interesada en conocer si el índice de siniestralidad es el mismo o diferente para los asegurados residentes en Valladolid capital que para los residentes en el resto de la provincia. Para ello se toman sendas muestras independientes de 200 asegurados de la capital y 150 del resto de la provincia, obteniéndose que en el año anterior 100 de los primeros y 50 de los segundos habían sufrido algún siniestro. Se pide:

a) Obtener un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en los índices de siniestralidad.
b) Si pensamos sólo en los asegurados de Valladolid capital, determinar el tamaño muestral necesario para que el error cometido en la estimación del índice sea inferior al 1% con probabilidad 0.95.
c) Si el estudio lo que pretende es corroborar que el índice de siniestralidad es mayor en la capital de provincia, ¿qué técnica utilizarías?.

(2 puntos)

5.- Se quiere comparar dos métodos A y B que se utilizan para determinar el porcentaje de hierro en muestras de mineral. Se toman 12 muestras de mineral y en cada una de ellas se determina el porcentaje de hierro según los dos métodos. Se obtienen los siguientes resultados:

A: 38.25, 31.68, 26.24, 41.29, 44.81, 46.37, 35.42, 38.41, 42.68, 46.71, 29.20, 30.76
B: 38.27, 31.71, 26.22, 41.33, 44.80, 46.39, 35.46, 38.39, 42.72, 46.76, 29.18, 30.79

Suponiendo normalidad construir un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de porcentajes medios determinados por los dos métodos.

(1 punto)

6.- La tabla adjunta recoge los tamaños de cinco muestras aleatorias simples independientes de poblaciones normales junto con los valores del estadístico $T_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$ y de las medias muestrales $\overline{X}_i$.

Muestra	1	2	3	4	5
n_i	6	4	3	7	8
T_i	42	31	26	43	50
$\overline{X}_i$	8.1	8.3	8.2	8.4	8.0

a) Suponiendo que las cinco poblaciones tienen la misma varianza obtener un intervalo de confianza para la desviación típica poblacional a nivel 0.95.
b) También suponiendo varianza común, obtener intervalos de confianza simultáneos para las cinco medias de nivel conjunto 0.9.
c) Considerando sólo los datos obtenidos para las muestras 3 y 4 y suponiendo conocido que la varianza de la población 4 es 2/3 de la varianza de la población 3 construir un intervalo de confianza del 99% para μ_3-2μ_4 , siendo μ_3 y μ_4 las medias de las poblaciones 3 y 4 respectivamente.

(2 puntos)