EXAMEN DE ESTADISTICA MATEMATICA. 30/1/01
2º DIPLOMATURA EN ESTADISTICA
1º PARCIAL

1.- Se tiene una muestra aleatoria simple de tamaño n de una población X con función de distribución F desconocida.

a) Obtener un intervalo de confianza aproximado de nivel α para $F(t_0)$, donde t_0 es conocido.
b) Suponemos que la muestra es de tamaño 100 y que hay 83 observaciones mayores que 5. Obtener un intervalo de confianza aproximado al 95% para F(5).
c) ¿Conoces algún resultado que relacione la función de distribución muestral y la teórica sin fijar un punto concreto en el que evaluar ambas funciones?. Explicar el significado de dicho resultado.
d) ¿Qué propiedades tiene $F_n(t_0)$ como estimador de $F(t_0)$?.

(2 puntos)

2.- Se está haciendo un estudio con animales de una población de la que se conoce que el 20% tiene determinada característica genética. Si se extrae al azar una muestra de 100 animales de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 15 animales presenten la característica anterior?. Dar la distribución asintótica del cociente entre las proporciones muestrales de animales con y sin característica en una muestra de tamaño n.
(1.5 puntos)

3.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad de Weibull, función de densidad

$$f(x) = \left(\frac{2x}{\theta^2}\right) \; Exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \qquad x > 0, \quad \theta > 0,$$

a) Obtener el E.M.V. para θ y para θ^2.
b) Estudiar la consistencia y la distribución asintótica del E.M.V. de θ^2.
c) ¿Puede haber un estimador insesgado de θ^2 con menor varianza que el E.M.V.?. Justificar la respuesta.
d) Determinar intervalos de confianza para θ de nivel de confianza $1-\alpha$:
   d1) Intervalo exacto
   d2) Intervalo asintótico

(2.5 puntos)

4.- Sea $X_1,\ldots,X_n$ m.a.s. de una población con ley de probabilidad uniforme $(\theta, 2\theta)$, se pide:

a) Obtener el E.M.V. para θ.

b) Estudiar la consistencia e insesgadez de los siguientes estimadores de θ y compararlos:

$$\frac{X_{(n)}}{2} \qquad \frac{(n+1)X_{(1)}}{n+2} \qquad \frac{2\overline{X}}{3}$$

Indicación:

$$EX_{(1)} = \frac{n+2}{n+1}\theta \qquad EX_{(n)} = \frac{2n+1}{n+1}\theta \qquad VarX_{(1)} = VarX_{(n)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$$

(1.5 puntos)

5.- En cierta factoría se trabaja con tres tipos de máquinas: A, B y C. El consumo energético diario de una máquina de tipo A es una v. a. con ley $N(\mu_A, \sigma^2)$, el de una máquina de tipo B es $N(\mu_B, 3\sigma^2)$ y el de una de tipo C es $N(\mu_C, 2\sigma^2)$. Se observan los consumos energéticos diarios de 11 máquinas de cada tipo elegidas al azar y se anotan las medias y varianzas muestrales siguientes:

$$\overline{X}_A = 50.19 \quad \overline{X}_B = 102.085 \quad \overline{X}_C = 75.20$$

$$S_A^2 = 0.8037 \quad S_B^2 = 2.628 \quad S_C^2 = 1.605$$

En el proceso de producción que se desarrolla en dicha factoría, intervienen 2 máquinas de tipo A , una de tipo B y una de tipo C. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Obtener un intervalo de confianza del 95% para el consumo energético medio diario del proceso de producción.

b) Suponiendo σ^2=0.64 conocido contestar a la siguiente pregunta. ¿El consumo medio de una máquina de tipo A es significativamente mayor de 50?.

c) Para el contraste del apartado anterior se pide:

c1) especificar para qué niveles es posible rechazar la hipótesis nula con los datos observados.

c2) obtener la potencia con que se detectaría, para un nivel α=0.05, un consumo medio de 51.

c3) obtener una expresión explícita para la función potencia del contraste y representarla.

c4) ¿Qué tamaño muestral es necesario para detectar una diferencia en el consumo medio de la máquina A de 0.5 con un error menor del 1%?.

d) ¿Soportan los datos la hipótesis de que el consumo medio de una máquina de tipo A es 50?. Indicar para qué niveles es posible rechazar esta hipótesis e interpretar el resultado.

(2.5 puntos)